西 安 电 子 科 技 大 学

试　　题（A 卷）

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	三.6	总分
分数									

注意：闭卷考试，时间 120 分钟，满分 100 分.

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设A、B为两个随机事件，且$A\overline{B}=\Phi$则下列表达正确的是_____.

A. $P(\overline{A}B)=0$　　B. $P(A)\le P(B)$　　C. $P(AB)>0$　　D. $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

2. 设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为随机变量X_1与X_2的分布函数，$f_1(x)$与$f_2(x)$分别为X_1与X_2的概率密度函数，则下列函数能作为某随机变量概率密度函数的是_____.

A. $af_1(x)+(1-a)f_2(x)$　　B. $[F_1(x)f_1(x)+F_2(x)f_2(x)]/2$

C $\sqrt{f_1(x)f_2(x)}$.　　D. $[f_1(x)+f_2(x)]/2$

3. 随机变量$Y\sim E(2)$，$X_1=\begin{cases}0, & Y\le 1\\ 1, & Y>1\end{cases}$，$X_2=\begin{cases}0, & Y\le 2\\ 1, & Y>2\end{cases}$，$Z=X_1X_2$,则$DZ=$_____.

A. e^{-2}　　B. $e^{-2}(1-e^{-2})$　　C. e^{-4}　　D. $e^{-4}(1-e^{-4})$

4. 已知随机变量序列$X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$满足契比雪夫大数定律，$EX_1=\mu$，$\varepsilon>0$，则下述说法正确的是_____.

A. $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$有相同的期望和方差　　B. $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$独立同分布

C. $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon)=0$　　D. $X_n\xrightarrow{P}\mu$

5. 设总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，两总体相互独立且方差已知，从总体 X 和 Y 中分别抽取容量为n_1和n_2的样本，相应的样本均值和样本方差分别记为$\overline{X}$，S_1^2和$\overline{Y}$，S_2^2，并记$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$，则两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间为_____.

A. $(\overline{X}-\overline{Y}\pm Z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$　　B. $(\overline{X}-\overline{Y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

C. $(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$　　D. $(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知$P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，则$P(A\overline{B})$的最大值为_____，最小值为_____.

2. 某电路输入噪声电压$V\sim U(-2,2)$（单位：伏），今对输入电压独立测量 20 次，记 X 为测量的噪声电压大于 1 的次数，则$P(X>10)\approx$_____.

3. 某仪器在$(0,t_1]$时间范围内接收到的粒子数$X\sim P(\lambda t_1)$，在$(0,t_2]$时间范围内接收到的粒子数$Y\sim P(\lambda t_2)$，$t_1<t_2$，$Z=Y-X$为该仪器在$(t_1,t_2]$时间范围内接收到的粒子数，则X与Z的相关系数$\rho=$_____.

4. 总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值和样本方差，则$a=$_____，$b=$_____时，$a\overline{X}^2+bS^2$服从自由度为_____的卡方分布（a、$b\neq 0$）.

5. 某正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，已知针对参数μ的检验的接受域为$(-\infty,t_\alpha(n-1))$，α为显著性水平，n为样本容量，样本均值和样本方差分别为$\overline{X}$和S^2，原假设中μ的范围分界点是μ_0，则相应的检验统计量为_____提出的假设为_____.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1. 某供货商有一大批瓷器，按箱分装，每箱中的次品率是 0.1，各箱独立. 今某顾客从中任选两箱，并从每箱中任取 1 只，如果都是正品，则买下该批瓷器；如果是一正品一次品，则再选一箱，抽取 1 只，如果是正品则买下该批瓷器；如果都是次品，则拒绝购买该批瓷器。

   求 (1) 该顾客买下该批瓷器的概率？

   (2) 已知该顾客买下该批瓷器，求一开始抽取的两只都是正品的概率？

2. 设二维连续型随机变量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{c}e^{-2cy}, & 0<x<2,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad c>0$$

   求：（1）常数c；（2）X和Y是否相互独立；（3）$Z=X-3Y$的概率密度函数?

3. 设随机变量X 的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，当观察到$X=x(0<x<1)$时，$Y\sim U(-x,x)$，求：（1）$f_{X|Y}(x|y)$；（2）$P(X>3/4|Y=1/2)$.

4. 设随机变量X和Y相互独立且具有相同的分布律，$P(X=0)=0.2$，$P(X=1)=0.8$，

$U = max(X, Y)$，$V = min(X, Y)$，试求：（1） (U, V)的联合分布率；（2）U和V是否相互独立；（3）关于t的方程$t^2 - Ut + V = 0$有实数根的概率?

5. 设总体 X 具有分布律 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1-2\alpha & 3\beta & \alpha-2\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix}$

其中，$0 < \beta < 1/3, 0 < \alpha < 1/2, \alpha > 2\beta$，$\alpha$和$\beta$为未知参数。若已经取得了一组容量为 8 的样本值$(-1, 0, 1, 0, -1, 2, 0, 2)$，试求参数$\alpha$和$\beta$的矩估计值和最大似然估计值.

6. 设两正态总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$相互独立且参数均未知，从总体 X 和 Y 中分别抽取容量为 8 和 9 的样本，计算得样本均值和样本方差的值分别为

$$\bar{x} = 15.05，\ s_1^2 = 0.2285 和 \bar{y} = 14.90，\ s_2^2 = 0.0575，$$

试求（1）给定置信水平 0.90，通过方差比的双侧置信区间判断σ_1^2和σ_2^2的大小；

（2）以（1）中的判断结果为备择假设（如果不能判断大小则认为相等，并作为原假设），在显著性水平$\alpha = 0.05$下，对判断结果进行检验.

（$F_{0.05}(7, 8) = 3.50$，$F_{0.05}(8, 7) = 3.73$，$F_{0.025}(7, 8) = 4.53$，$F_{0.025}(8, 7) = 4.90$ ）

2024 年评分标准

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. B　　2.D　　3.D　　4.A　　5.B

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 0.5 ，0.3　　2. $1-\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{15}}\right)$ 或 $=\sum_{k=11}^{20} C_{20}^{k}(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{20-k}$　　3. 0

4. $\frac{n}{\sigma^2}$ ，$\frac{n-1}{\sigma^2}$，n （依次为 1、1、2 分）　5. $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　$H_0:\mu\le\mu_0$; $H_1:\mu>\mu_0$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1. 解　（1）设A =”顾客买下这批瓷器”，B_1 =”取到的两只都是正品”，　B_2 =”取到的两只是一正品一次品”，　B_3 =”取到的两只都是次品”，则B_1，B_2和B_3构成一组划分

$P(B_1)=0.9\times0.9=0.81$，$P(A|B_1)=1$

$P(B_2)=0.9\times0.1+0.1\times0.9=0.18$，$P(A|B_2)=0.9$

$P(B_3)=0.1\times0.1=0.01$，$P(A|B_3)=0$

……4 分

则由全概率公式

$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$，

$=0.81\times1+0.18\times0.9+0.01\times0=0.972.$

……7 分

（2）由贝叶斯公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.81}{0.972}\approx0.833$$

……10 分

2. 解　（1）由规范性

$$1=\int_0^{+\infty}dy\int_0^2\frac{1}{c}e^{-2cy}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{c}e^{-2cy}dy=\frac{-1}{c^2}e^{-2cy}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{c^2}$$

又$c>0$，所以$c=1$

……3 分

（2）计算边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy=\frac{-1}{2}e^{-2y}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2},0<x<2,\ f_X(x)=0\text{其它}$$

$$f_Y(y)=\int_0^{2}e^{-2y}dx=2e^{-2y},y>0,\ f_Y(y)=0\text{其它}$$

显然$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故随机变量X和Y相互独立。

.....8分

（3）计算随机变量Z的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+3y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z+3y)f_Y(y)dy$$

由联合概率密度非0区条件，有$y>0$且$0<z+3y<2$，

即$y>0$且$-\frac{z}{3}<y<\frac{2}{3}-\frac{z}{3}$

当$\frac{2}{3}-\frac{z}{3}\le 0$，即$z\ge 2$时，$f_Z(z)=0$

当$-\frac{z}{3}\le 0$且$\frac{2}{3}-\frac{z}{3}>0$时，即$0\le z<2$时，$f_Z(z)=\int_0^{\frac{2}{3}-\frac{z}{3}}e^{-2y}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-\frac{2}{3}(2-z)})$

当$-\frac{z}{3}>0$时，即$z<0$时，$f_Z(z)=\int_{-\frac{z}{3}}^{\frac{2}{3}-\frac{z}{3}}e^{-2y}dy=\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}z}(1-e^{-\frac{4}{3}})$ 即

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}z}(1-e^{-\frac{4}{3}}), & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-\frac{2}{3}(2-z)}) & 0\le z<2\\ 0 & z\ge 2\end{cases}$$

.....10分

3. 解 （1）由题意，当$0<x<1$时

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & -x<y<x\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

从而可得X和Y的联合概率密度

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f(x)=\begin{cases}1, & -x<y<x,0<x<1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

则Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1dx=1-|y|,-1<y<1\\0,\qquad\text{其它}\end{cases}$$

所以，当$-1<y<1$时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|},|y|<x<1\\0,\qquad\text{其它}\end{cases}$$

.....7 分

（2）所求概率为

$$P(X>3/4|Y=1/2)=\int_{\frac{3}{4}}^{1}f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})dx=\int_{\frac{3}{4}}^{1}2dx=\frac{1}{2}$$

.....10 分

4. 解：（1）由X和Y的独立性及其分布律可知：

$P(U=0,V=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=0.2\times0.2=0.04$

$P(U=0,V=1)=0$

$P(U=1,V=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.2\times0.8\times2=0.32$

$P(U=1,V=1)=P(X=1,Y=1)=0.8\times0.8=0.64$

所以(U,V)的联合分布律为

U \ V	0	1
0	0.04	0
1	0.32	0.64

.....4 分

（2）$P(U=0)=0.04+0=0.04$，$P(V=0)=0.04+0.32=0.36$

显然$P(U=0)\times P(V=0)=0.04\times0.36\neq0.04=P(U=0,V=0)$

所以U和V不相互独立

.....3 分

（3）由方程判别式，方程有实根的概率为

$$P(U^2-4V\geq0)=P(U=0,V=0)+P(U=1,V=0)=0.04+0.32=0.36$$

……10 分

5. 解：（1）矩估计为

$\mu_1 = EX = -1\times(1-2\alpha)+0\times 3\beta+1\times(\alpha-2\beta)+2\times(\alpha-\beta)=5\alpha-4\beta-1$

$\mu_2 = EX^2 = 1\times(1-2\alpha)+0\times 3\beta+1\times(\alpha-2\beta)+4\times(\alpha-\beta)=3\alpha-6\beta+1$

联立以上方程求解α和β，并分别以$\overline{X}$和A_2替代μ_1和μ_2，得矩估计量

$$\widehat{\alpha}=\frac{1}{9}(3\overline{X}-2A_2+5)$$

$$\widehat{\beta}=\frac{1}{18}(3\overline{X}-5A_2+8)$$

根据样本值计算得$\bar{x}=\frac{3}{8}$，$a_2=\frac{11}{8}$，代入估计量得矩估计值$\widehat{\alpha}=\frac{3}{8}$，$\widehat{\beta}=\frac{1}{8}$

……5 分

（2）最大似然估计量为

由样本值$(-1,0,1,0,-1,2,0,2)$得似然函数为

$$L(\alpha,\beta)=(1-2\alpha)^2(3\beta)^3(\alpha-2\beta)(\alpha-\beta)^2$$

对数似然函数

$$lnL(\alpha,\beta)=2ln(1-2\alpha)+3ln3+3ln\beta+ln(\alpha-2\beta)+2ln(\alpha-\beta)$$

$$\frac{\partial lnL(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\frac{-4}{1-2\alpha}+\frac{1}{\alpha-2\beta}+\frac{2}{\alpha-\beta}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial lnL(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\frac{3}{\beta}+\frac{-2}{\alpha-2\beta}+\frac{-2}{\alpha-\beta}=0 \qquad (2)$$

由(2)式整理得$3\alpha^2-13\alpha\beta+12\beta^2=0$

解得$\alpha=\frac{4}{3}\beta<2\beta$舍去；另一解$\alpha=3\beta$成立，代入(1)式得最大似然估计值为

$\widehat{\alpha}=\frac{3}{8}$，$\widehat{\beta}=\frac{1}{8}$

……10 分

6.解 （1）在置信水平$1-\alpha=0.90=1-0.10$下，总体均值未知的条件下方差比σ_1^2/σ_2^2的区间估计枢轴量为

$$F=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

相应的双侧置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

$$=\left(\frac{0.2285}{0.0575}\frac{1}{F_{0.05}(7,8)},\frac{0.2285}{0.0575}F_{0.05}(8,7)\right)$$

$$=\left(3.974\times\frac{1}{3.50},3.974\times3.73\right)=(1.135,14.823)$$

由于置信下限等于1.135>1，所以可以判定$\sigma_1^2>\sigma_2^2$

……5分

（2）根据（1）中的判断结果提出如下假设

$$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

总体均值未知，则检验统计量为

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

在显著性水平$\alpha=0.05$下，该右边检验的拒绝域为：

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(7,8)=3.50$$

代入$s_1^2=0.2285$，$s_2^2=0.0575$，得

$$F=\frac{0.2285}{0.0575}=3.974>3.50$$

落在了拒绝域内，故拒绝H_0，而接受H_1，可以认为$\sigma_1^2>\sigma_2^2$

……10分

西 安 电 子 科 技 大 学

试　　题

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	三.6	总分
分数									

注意：闭卷考试，时间 120 分钟，满分 100 分.

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 A、B、C 为三个随机事件，则 $\overline{AB \cup BC \cup AC}$ 表示_____.

A. A、B、C 至少发生一个　　**B.** A、B、C 至少发生两个

C. A、B、C 至多发生两个　　**D.** A、B、C 至多发生一个

2. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取_____.

A. $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　**B.** $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

C. $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$　　**D.** $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

3. 若 $D(X)>0,D(Y)>0$，由等式 $D(X+Y)=DX+DY$ 不能推出_____.

A. $E(XY)=E(X)E(Y)$　　**B.** $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

C. X 与 Y 不独立　　**D.** X 与 Y 不相关

4. 已知一总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，$X_2,\cdots$，X_n 是来自总体的一组子样，样本均值和方差分别为：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则下列结论不正确的是_____.

A. μ 的矩估计和极大似然估计量都是 $\overline{X}$

B. S 是 σ 的无偏估计量

C. S^2 是 σ^2 的相合估计量

D. $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，据此样本检验假设：$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则_____.

A. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

B. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

C. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

D. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 已知 $P(A)=0.6$，$P(AB)=0.3$，则 $P(A\overline{B})=$_____，$P(\overline{B}|A)=$_____.

2.设 X 服从正态分布 $N(2,3)$，则 $Y=5-2X$ 的分布函数为_____.

3.设 X_1,X_2,X_3 相互独立，X_1 服从 $[0,6]$ 上的均匀分布，X_2 服从 $N(0,4)$ 的正态分布，X_3 服从参数为 5 的泊松分布.令 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$_____，Y 与 X_2 的相关系数 $\rho(Y,X_2)=$_____.

4.若随机变量 X 服从参数为 n 与 p 的二项分布 $X\sim B(n,p)$，$EX=2.4$，$DX=1.44$，则 $p\{X<1\}=$_____.

5.从一个正态总体中随机抽取 $n=16$ 的一个随机样本，样本均值为 **20**，样本标准差为 **1**，则总体均值 μ 的置信水平为 **90%**的置信区间是_____.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分)

1.甲，乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 **4** 杯，如果从中挑 **4** 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是成功一次.

求 (1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少?

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒．他连续试验 **10** 次，成功 **3** 次．试推断他是猜对的，还是确有区分能力（设各次试验相互独立）.

2.设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4, & 0\le x\le 0.5, 0\le y\le 0.5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}；(2) X 和 Y 是否相互独立?

3.设 X,Y 是相互独立的随机变量，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=0.5$，Y 的密度函数为 $f(y)=2y,0<y<1$，求：(1) $P(Y<EY)$；(2) $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

4.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Cx^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，令 $Y=X^2$，试

求：(1) 常数 C；(2) 概率 $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)$；(3) Y 的概率分布函数 $F_Y(y)$.

5.设总体 X 具有分布律

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$$

其中 $0<\theta<1$ 为未知参数. 若已经取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$，试求(1) θ 的极大似然估计值；(2)如果 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体的一组样本，求参数 θ 矩估计量.

6.为研究某材料的抗压强度, 抽查了该材料 9 个样本的抗压强度, 得到如下数据 (单位：百帕)：

4.8，**4.1**，**4.4**，**4.0**，**4.5**，**4.1**，**4.9**，**4.2**，**4.4** （$\bar{x}=4.378, s=0.3153$）

设该材料的抗压强度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，试回答以下问题：**(1)** 能否认为 $\mu \geq 4.4$ **?(2)** 在置信度 **0.95** 下，计算材料平均抗压强度 μ 的置信区间.（上分位点 $t_{0.05}(8)=1.860, t_{0.025}(8)=2.306$）

试题（A）参考答案评分标准

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. D　　**2.**A　　**3.**C　　**4.**B　　**5.**D

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 0.3　0.5　　**2.** $N(1,12)$ 或 $\Phi\left(\frac{y-1}{2\sqrt{3}}\right)$ 或 $\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{24}}dx$

3.64　-0.5　　**4.** 0.6^6　　**5.** $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1.解　（1）A=“成功一次”，

$$P(A)=\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70}$$

..... 4 分

（2）设此人没有区分能力，令 Y=“连续试验 10 次，成功的次数”，

$$Y\sim b\,(10\,,\frac{1}{70}\,)$$

..... 6 分

$$P\{Y=3\}=C_{10}^3(\frac{1}{70})^3(\frac{69}{70})^7\approx 0.0003$$

..... 8 分

可见，猜对的概率很小，故此人确有区分能力。　..... 10 分

2.解　（1）由题意可得

$$EXY=\int_0^{0.5}dx\int_0^{0.5}4xydy=\frac{1}{16}$$

$$EX=\int_0^{0.5}dx\int_0^{0.5}4xdy=\frac{1}{4}$$

$$EY=\int_0^{0.5}dx\int_0^{0.5}4ydy=\frac{1}{4}$$

$$EX^2=\int_0^{0.5}2x^2dx=\frac{1}{12}$$

因此　$DX=\frac{1}{48}$

同理 $EY^2=\int_0^{0.5}2y^2dy=\frac{1}{12}$

得 $DY=\frac{1}{48}$

所以 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$$ 5分

（2）随机变量 X,Y 的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_0^{0.5}4dy=2\ \ x\in(0,0.5)$$

$$f_Y(y)=\int_0^{0.5}4dy=2\ \ y\in(0,0.5)$$

显然 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故随机变量 X,Y 相互独立。 10分

3.解 （1） $EY=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$

故 $P(Y<EY)=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}$ 5分

（2）

$$\begin{aligned}P(Z\le z)=P(X+Y\le z)&=P(X+Y\le z|X=0)P(X=0)\\&\quad+P(X+Y\le z|X=2)P(X=2)\\&=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)\\&=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2)\end{aligned}$$

所以 $Z=X+Y$ 的密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)$$ 10分

4. 解：（1）由密度函数性质可知：

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，即 $1=\int_0^1 Cx^2 dx = \frac{1}{3}Cx^3\Big|_0^1$，得 $C=3$ ..... 3 分

（2） $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2 dx=\frac{7}{8}$ ..... 5 分

（3）显然当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}} 3x^2dx=y^{\frac{3}{2}}$$

当 $1\le y$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_0^1 3x^2dx=1$$

故 Y 的概率分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y^{\frac{3}{2}}, & 0\le y<1\\ 1, & 1\le y\end{cases}$$ ..... 10 分

5 .解：（1） 由题意的似然函数为

$$L(\theta)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,X_3=x_3)=P(X_1=1,X_2=2,X_3=1)$$

$$=P(X_1=1)\times P(X_2=2)\times P(X_3=1)=\theta^2\times 2\theta(1-\theta)\times\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

对数似然函数

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

得极大似然估计值为 $\hat{\theta}_{极}=\frac{5}{6}$ ..... 5 分

（2）矩估计为：$EX=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta=\overline{X}$

得 $\hat{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$ ..... 10 分

6. 解：(1) 建立假设检验 $H_0:\mu\geq 4.4$ $H_1:\mu<4.4$

检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-4.4}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{4.378-4.4}{0.3153/\sqrt{9}}=-0.21$

$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(8)=1.860$

该左侧检验的拒绝域为：$T\leq -t_\alpha(n-1)=-1.860$

因为 $T=-0.21>-t_\alpha(n-1)=-1.860$，故接受原假设，可以认为 $\mu\geq 4.4$.

..... 5 分

(2) 在置信度 0.95 下，$t_{\frac{\alpha}{2}}(8)=2.306$

$$\Delta=\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(8)=\frac{0.3153}{\sqrt{9}}2.306=0.24$$

故 μ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\Delta,\overline{X}+\Delta\right]=\left[4.378-0.24,4.378+0.24\right]=\left[4.14,4.62\right]$$

..... 10 分

西 安 电 子 科 技 大 学

试　　题

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	三.6	总分
分数									

注意：闭卷考试，时间 120 分钟，满分 100 分.

装 订 线　课教师：　学号：　姓名：　班级：　装 订 线

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1.设 A,B 是随机事件，且 $AB=\overline{A}\overline{B}$，则（　）.

（A）$A\cup B=\Phi$　　（B）$A\cup B=\Omega$

（C）$A\cup B=A$　　（D）$A\cup B=B$

2.设随机变量 X、Y、Z 相互独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(2,3),Z\sim N(3,5)$，记 $p_1=P(X<Y)$，$p_2=P(Y<Z)$，则（　）.

（A）$p_1>p_2$　（B）$p_1<p_2$　（C）$p_1=p_2$　（D）不能确定

3.设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数（　）.

（A）是连续函数　　（B）至少有两个间断点

（C）是阶梯函数　　（D）恰好有一个间断点

4.设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，$EX_i^k=\mu_k(i=1,2,\cdots,n)$，则由切比雪夫不等式，有 $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geq\varepsilon\right)\leq$（　）.

（A）$\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　（B）$\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　（C）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　（D）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

5.设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，则 $Y=\frac{1}{X^2}\sim$（　）.

（A）$\chi^2(n)$　（B）$\chi^2(n-1)$　（C）$F(n,1)$　（D）$F(1,n)$

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1.设新冠肺炎病毒的发病率为 0.01，现做核酸进行检测，设 A 表示“检测者

被感染”，B 表示“检测结果呈阴性”，已知核酸检测的可靠性为 $P(B|A)=0.4$，$P(B|\overline{A})=1$，若一个人核酸检测结果为阴性，则这个人实际被感染的概率为_____.

2.设 X 有严格单调上升连续分布函数 $F(x)$，令 $Y=F(X)$，则 $EY^2=$_____.

3.设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$，则 $P(X<0,Y>0)=$_____.

4.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geq 2)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，令 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，则 $EY=$_____.

5.设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为_____.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1.袋中有 **8** 只球，其中 **4** 白球，**4** 只黑球，从袋中任取 **4** 只球放入甲盒，其余放入乙盒，然后分别从两盒中任取 **1** 只球.（**1**）求两只球颜色相同的概率；（**2**）在两只球颜色相同的条件下，试问放入甲盒的 **4** 只球有几只白球的概率最大.

2.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{1+x}+b, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，求（1）常数 a、b 及 X 的概率密度 $f(x)$；（2）$Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$；（3）概率 $P(1\le X\le 2)$.

3.设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$，（1）求 $P(Y\le EY)$；（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

4.袋中有 1 只红球、2 只黑球与 3 只白球，现无放回地从袋中取球两次，每次取一只球.以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.（1）求 $P(X=1|Z=0)$；（2）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；（3）求 X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

5.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2 > 0$ 未知.（1）求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；（2）问 $\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的无偏估计量？（3）$\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的一致（相合）估计量？

6.设某厂生产的一种钢索，其断裂强度 X（**kg/cm²**）服从正态分布 $N(\mu, 40^2)$，从中选取一个容量为 9 的样本，得 $\bar{x} = 780$ **kg/cm²**，能否据此认为这批钢索的断裂强度为 800 **kg/cm²**（$\alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$）？

试题（A）参考答案评分标准

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. B

2.A

3.D

4.A

5.C

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. $\frac{2}{497}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $2(n-1)\sigma^2$

5. $(8.2,10.8)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1.**解** 设 B_i 表示“甲盒中有 i 只白球”，$i=0,1,2,3,4$，A 表示“取出的两只球颜色相同”，则

$$P(B_0)=\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70},\quad P(B_1)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}=\frac{8}{35},\quad P(B_2)=\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\frac{18}{35},$$

$$P(B_3)=\frac{C_4^3C_4^1}{C_8^4}=\frac{8}{35},\quad P(B_4)=\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70},\quad P(A|B_0)=0,$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_1^1C_3^1+C_3^1C_1^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{3}{8}\text{（或}P(A|B_1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\text{甲盒白乙盒白或甲盒}$$

红乙盒红，下同），$P(A|B_2)=\dfrac{C_2^1C_2^1+C_2^1C_2^1}{C_4^1C_4^1}=\dfrac{4}{8}$，$P(A|B_3)=\dfrac{C_3^1C_1^1+C_1^1C_3^1}{C_4^1C_4^1}=\dfrac{3}{8}$，

$P(A|B_4)=0$ ..... 4 分

（1）由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{70}\times 0+\frac{8}{35}\times\frac{3}{8}+\frac{18}{35}\times\frac{4}{8}+\frac{8}{35}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{70}\times 0=\frac{3}{7}$$

..... 3 分

（2）由 Bayes 公式，得

$P(B_0|A)=0$，$P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$，$P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{3}{5}$

$P(B_3|A)=\dfrac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$，$P(B_4|A)=0$，故甲盒中有 2 只白球的概率最大。

..... 3 分

2.**解**（1）由 $F(+\infty)=1$，得 $a+b=1$；再由 $F(0+0)=F(0)$，得 $b=0$，从而 $a=1$，因此

$a=1,b=0$ ..... 2 分

当 $a=1,b=0$ 时，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，从而 X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$ ..... 2 分

（2）先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})$$

$$=\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}-0=\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4\text{分}$$

再求Y的概率密度$f_Y(y)$：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\text{分}$$

3.**解**（1）由于$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 y\cdot 2ydy=\frac{2}{3}$，因此

$$P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4\text{分}$$

（2）设Y的分布函数为$F(y)$，Z的分布函数和概率密度分别为$F_Z(z),f_Z(z)$，由X,Y的独立性及全概率公式，得

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=P(X=0)P(X+Y\le z\,|\,X=0)+P(X=2)P(X+Y\le z\,|\,X=2)$$

$$=\frac{1}{2}[P(Y\le z\,|\,X=0)+P(Y\le z-2\,|\,X=2)=\frac{1}{2}[P(Y\le z)+P(Y\le z-2)$$

$$=\frac{1}{2}[F_Y(z)+F_Y(z-2)]$$

从而Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f((z-2)]=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, & 2<z<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ 6\text{分}$$

4.**解**（1）$P(X=1\,|\,Z=0)=\dfrac{C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_3^1C_2^1}=\dfrac{2}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\text{分}$

（2）X 的可能取值为 $0,1$，Y 的可能取值为 $0,1,2$，且

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{1}{5},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1+C_3^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{1}{15},\quad P(X=1,Y=0)=\frac{C_1^1C_3^1+C_3^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{2}{15},\quad P(X=1,Y=2)=0$$

即 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

..... 4 分

（3）由（2）知，X，Y 与 XY 的分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

XY	0	1
P	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$

由于 $EX=\frac{1}{3}$，$DX=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，$EY=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$，

$$EY^2=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5},\quad DY=EY^2-(EY)^2=\frac{4}{5}-(\frac{2}{3})^2=\frac{16}{45}$$

$$EXY=\frac{2}{15}$$

因此

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{-\frac{4}{45}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{16}{45}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ..... 4 分

5.**解**（1）对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

①似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$；

②取自然对数 $\ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$；

③令 $\dfrac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$，解之得 σ^2 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

从而 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ ..... 5 分

（2）由于 $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，因此

$$E\hat{\sigma}^2=E(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^2}{n}E(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2$$

因此 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计..... 3 分

（3）$D\hat{\sigma}^2=D(\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\dfrac{\sigma^4}{n^2}D(\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\dfrac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\dfrac{2\sigma^4}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式，有

$$0\le P(\left|\hat{\sigma}^2-\sigma^2\right|)=P(\left|\hat{\sigma}^2-E\hat{\sigma}^2\right|\ge\varepsilon)\le\frac{D\hat{\sigma}^2}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 0,n\to\infty$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\hat{\sigma}^2-\sigma^2\right|\geq\varepsilon)=0$，即 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的相合估计量..... 2 分

6.**解**（i）需检验，$H_0:\mu=800, H_1:\mu\neq 800$..... 2 分

（ii）选择检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-800}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$..... 2 分

（iii）由于 $\alpha=0.05$，因此临界点为 $\pm z_{\frac{\alpha}{2}}=\pm 1.96$，从而接受域为 $(-1.96,1.96)$

..... 2 分

（iv）由于 $n=9,\sigma=40,\overline{x}=780$，因此检验统计量 U 的样本值为

$$u=\frac{780-800}{40/\sqrt{9}}=-1.5$$ ..... 2 分

（v）由于 $u=-1.5\in(-1.96,1.96)$，因此接受 H_0，即可以认为这批钢索的断裂强度为..... 2 分

装 订 线
课教师：
学号：
姓名：
班级：

西 安 电 子 科 技 大 学

试　　题

题号	一	二	三.1	三.2	三.3	三.4	三.5	三.6	总分
分数									

注意：闭卷考试，时间 120 分钟，满分 100 分.

一、单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1.设事件 A 的发生必然导致 B 的发生，且 $0<P(B)<1$，则 $P(A|\overline{B})=$（　）.

（A）0　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1

2.设随机变量 $X\sim U[0,2]$，令 $Y=\begin{cases}0, & X<1\\ X, & X\geq 1\end{cases}$，则 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 的间断点的个数为（　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3.设随机变量 X、Y 相互独立，且分别服从参数为 1 和参数为 4 的指数分布，则 $P(X<Y)=$（　）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{2}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

4.设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，其分布函数为 $F(x)=a+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{b}$，则辛钦大数定律对此序列（　）.

（A）适用　　（B）当常数 a,b 取适当数值时适用

（C）不适用　　（D）无法判别

5.设 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的一个样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为（　）.

（A）$F(1,1)$　　（B）$F(2,1)$　　（C）$t(1)$　　（D）$t(2)$

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1.设随机变量 X 分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$　$(i=1,2)$

的条件下 $Y \sim U(0,i)$，则 $P(Y \le \frac{3}{2}) =$_____.

2.设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P(Y=2) =$_____.

3.设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,0;1,1;0)$，则 $P(XY - Y < 0) =$_____.

4.设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n \ge 2)$ 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，令 $U_i = (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，则 $EU_i =$_____.

5.设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知，由来自于总体 X 的一个容量为 9 的样本计算得到样本均值 $\bar{x} = 6$，样本标准差 $s = 0.5$，则参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为_____（$t_{0.025}(8) = 2.306$）.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1. 设电源电压不超过200 V、在200~240 V 和超过240 V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为0.1，0.001和0.2，假设电源电压服从正态分布 $N(220, 25^2)$，试求：（1）该电子元件损坏的概率；（2）该电子元件损坏时，电源电压在 200～240V 的概率（$\Phi(0.8) = 0.788$）.

2.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3Cx, & 0<x<2\sqrt{3}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，令 $Y=X^2$，试求：（1）常数 C；（2）概率 $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)$；（3）$X$ 的分布函数；（4）Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

3. 设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，试求：（1）边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度；（3）条件概率 $P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right)$.

4.箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1，2，3 个，现从箱中随机地取出 2 个球，记 X 为取出的红球数，Y 为取出的白球数.（1）求随机变量 (X,Y) 的联合分布律；（2）求 X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

5.设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中 θ $(\theta>0)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，试求：（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；（3）问 $\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计量？$\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的一致（相合）估计量？

6.某种元件的寿命 X（单位：小时）服从正态分布，现从一批这种元件中抽取 **16** 只，测得平均寿命 $\bar{x}=241.5$ 小时，标准差为 $s=99$ 小时，试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下可否认为元件的平均寿命大于 225 小时（$t_{0.05}(15)=1.7531$）？

试题（A）参考答案评分标准

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1.A

2.B

3.A

4.C

5.C

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. $\frac{7}{8}$

2. $\frac{9}{64}$

3. $\frac{1}{2}$

4. $\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2$

5. $(5.616, 6.384)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1.**解** 设 X 表示电源电压，B_1 表示事件“电源电压不超过 200V”，B_2 表示事件“电源电压在 200～240V”，B_3 表示事件“电源电压超过 240V”，A 表示事件“电子元件损坏”，则 $X \sim N(200, 25^2)$，$B_1 = \{X \le 200\}, B_2 = \{200 < X \le 240\}, B_3 = \{X > 240\}$，且

$$P(B_1) = P(X \le 200) = \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right) = \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 0.212$$

$$P(B_2) = P(200 < X \le 240) = \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=0.576$$

$$P(B_3)=P(X>240)=1-P(X\le 240)=1-\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A|B_1)=0.1, P(A|B_2)=0.001, P(A|B_3)=0.2 \quad \text{..... 3 分}$$

（1）由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.212\times 0.1+0.576\times 0.001+0.212\times 0.2$$

$$=0.0642 \quad \text{..... 4 分}$$

（2）由 Bayes 公式，得

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.576\times 0.001}{0.0642}=0.009 \quad \text{..... 3 分}$$

2.**解**（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $1=\int_0^{2\sqrt{3}}3Cxdx=18C$，故 $C=\frac{1}{18}$ ..... 2 分

（2）由（1）知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, & 0<x<2\sqrt{3}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由于 X 是连续型随机变量，因此所求的概率为 $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{6}xdx=\frac{5}{16}$ ..... 2 分

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $0\le x<2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{6}tdt=\frac{x^2}{12}$；

当 $x\ge 2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=1$，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{12}x^2, & 0\le x<2\sqrt{3}\\ 1, & x\ge 2\sqrt{3}\end{cases} \quad \text{..... 3 分}$$

（4）当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\le y<12$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y=P(X^2\le y)=P(X^2<0)+P(0\le X^2\le y)$$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{6}xdx=\frac{y}{12}$$

当 $y\ge 12$ 时，$F_Y(y)=1$，故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{y}{12}, & 0\le y<12\\ 1, & x\ge 12\end{cases}$$ ..... 3 分

3.**解**（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ..... 2 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx=1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ..... 2 分

（2）方法一　先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.当 $\dfrac{z}{2}<0$，即 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le\dfrac{z}{2}<1$，即 $0\le z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)=\iint\limits_{2x-y\le z}f(x,y)dxdy=z-\frac{z^2}{4}$$

当 $\dfrac{z}{2}\ge 1$，即 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，即 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\dfrac{z^2}{4}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

再求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2},0<z<2\\0,\quad\text{其它}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4\text{分}$$

方法二　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$

由$\begin{cases}0<x<1\\0<2x-z<2x\end{cases}$，得$0<z<2x$，从而$0<z<2$.故当$0<z<2$时，$f_Z(z)>0$，

在其他点，$f_Z(z)=0$.

再由$\begin{cases}0<x<1\\0<2x-z<2x\end{cases}$，得$\begin{cases}0<x<1\\\frac{z}{2}<x\end{cases}$，即$\frac{z}{2}<x<1$，从而$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{1}1dx=1-\frac{z}{2},\ 0<z<2\\0,\quad\text{其他}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4\text{分}$$

（3）$P(Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2})=\frac{P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx}=\frac{3}{4}$ 2分

4.解（1）X的可能取值为0，1，Y的可能取值为0，1，2

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\ P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15},\ P(X=1,Y=0)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},\ P(X=1,Y=2)=0$$

即(X,Y)的联合分布律为..... 5分

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

（2）由(X,Y)的联合分布律可得，X,Y,XY的分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

XY	0	1
P	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$EX=\frac{1}{3},\quad DX=\frac{2}{9},\quad EY=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3},\quad EXY=\frac{2}{15}$$

$$EY=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5},\quad EY=EY^2-(EY)^2=\frac{4}{5}-\frac{4}{9}=\frac{16}{45}$$

从而$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$，故$X$与$Y$的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{4}{45}}{\sqrt{\frac{16}{45}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$ 5分

5.解（1）$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$，由矩估计法，得$\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}=\bar{X}$，

解之得θ的矩估计量为$\hat{\theta}_1=\frac{4\bar{X}^2}{\pi}$ 3分

（2）对于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

(i)似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta}x_ie^{-\frac{x_i^2}{\theta}}=\frac{2^n}{\theta^n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$，$x_i>0,i=1,2,\cdots,n$；

(ii)取自然对数：$\ln L(\theta)=n\ln 2-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$；

(iii)令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$，解之得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，从

而θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 3分

（3）由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta$，因此

$$E\hat{\theta}_2=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX^2=\theta$$

即 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 θ 的无偏估计量 …… 2分

又 $E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}x^5e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=2\theta^2$，故 $D(X^2)=E(X^4)-(EX^2)^2=\theta^2$，

从而 $D\hat{\theta}_2=D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX^2=\frac{\theta^2}{n}$，由切比雪夫不等式，$\forall\varepsilon>0$，有

$$0\le P(|\hat{\theta}_2-\theta|)=P(|\hat{\theta}_2-E\hat{\theta}_2|\ge\varepsilon)\le\frac{D\hat{\theta}}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\to0,n\to\infty$$

从而 $\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_2-\theta|\ge\varepsilon)=0$，即 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 θ 的相合估计量 …… 2分

6.**解**（i）需检验

$$H_0:\mu\le225,H_1:\mu>225$$ …… 2分

（ii）选择检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-225}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$ …… 2分

（iii）由于 $\alpha=0.05,n=16$，因此临界点为 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$，从而接受域为 $(-\infty,1.7531)$ …… 2分

（iv）由于 $n=16,s=99,\bar{x}=241.5$，因此检验统计量的样本值为

$$t=\frac{241.5-225}{99/\sqrt{16}}=0.6667$$ …… 2分

（v）由于 $t=0.6667\in(-\infty,1.7531)$，因此接受 H_0，即可以认为元件的平均寿命不大于225小时 …… 2分